УДК 66.011

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ АЭРОГИДРОДИНАМИКИ

П.Н. Иваньшин

Аннотация

В работе построено прибиженное решение пространственной обратной краевой задачи аэрогидродинамики. **Ключевые слова:** (прибиженное решение; сплайн; полигармоническая функция)

1. Введение

В работе построено приближенное решение основной системы уравнений пространственной обратной краевой задачи аэрогидродинамики в секторе, заключенном между двумя сечениями крыла плоскостями, перпендикулярными крыловым профилям. Решение представляет собой сведеие пространственной задачи к семейству плоских, что является сттандартным приемом для этой проблемы [1].

Затем решения и их производные в различных секторах на общем профиле склеиваем повышая гармоничность приближенного решения.

2. Линейный сплайн

Найдем приближенное решение основной системы уравнений в секторе, заключенном между двумя сечениями крыла плоскостями, перпендикулярными крыловым профилям.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial h}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial h}=\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial h}=\frac{\partial w}{\partial y}$$

Пусть приближенное решение линейно по h

$$\begin{aligned} u(x,y,h)&=u_0(x,y)+hu_1(x,y),\\ v(x,y,h)&=v_0(x,y)+hv_1(x,y),\\ w(x,y,h)&=w_0(x,y)+hw_1(x,y). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial h}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial h}=\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial h}=\frac{\partial w}{\partial y}$$

Получим соотношения на u_j,v_j,w_j, $j=0,1$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=-\frac{\partial v_1}{\partial y},\frac{\partial u_1}{\partial y}=\frac{\partial v_1}{\partial x}. \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{\partial v_0}{\partial y} - w_1, \frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial x}. \tag{2}$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} + h\frac{\partial w_1}{\partial x} = u_1, \frac{\partial w_0}{\partial y} + h\frac{\partial w_1}{\partial y} = v_1. \tag{3}$$

Тогда $w_1 = \mathrm{const}$, $w_0 = \frac{1}{2i}(\int v_1(z) + iu_1(z)dz - \overline{\int v_1(z) + iu_1(z)dz})$, а функции $f_1(z) = v_1(z) + iu_1(z)$ и $f_0(z) = v_0(x,y) + iu_0(x,y) + iw_1(x - iy)$ аналитические. Следовательно, построение компонент решения сводится к решению системы стандартных плоских задач для профилей. Сами профили получаются при помощи сдвига, пропорционального w_1. Следовательно, поскольку в соседних секторах $w_1 - w_1' = O(h)$ общий для двух секторов профиль модифицируется на величину $O(h)$. Но при этом сами модифицированные профили на общем сечении могут не совпадать. Для того, чтобы исправить эту проблему, необходимо рассматривать сплайны степени больше 1 по h.

3. Нелинейный сплайн и склейка рашений в соседних секторах

По аналогии с конструкциями в [2, 3] решим вопрос о согласовании решений в смежных секторах на общем профиле.

Если решение — нелинейный полином степени n по h, то опять w_n — константа, но при этом получим n аналитических функций, позволяющих склеить решения на общих для смежных секторов плоских профилях.

Пусть решение — полином второй степени по h:

$$\begin{aligned} u(x,y,h) &= u_0(x,y) + hu_1(x,y) + h^2u_2(x,y), \\ v(x,y,h) &= v_0(x,y) + hv_1(x,y) + h^2v_2(x,y), \\ w(x,y,h) &= w_0(x,y) + hw_1(x,y) + h^2w_2(x,y). \end{aligned}$$

Получим соотношения на u_j, v_j, w_j, $j = 0, 1, 2$:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{\partial v_2}{\partial y}, \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}. \tag{4}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\partial v_1}{\partial y} - 2w_2, \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial v_1}{\partial x}. \tag{5}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{\partial v_0}{\partial y} - w_1, \frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial x}. \tag{6}$$

Тогда

$$w_2 = \mathrm{const}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = 2u_2, \frac{\partial w_1}{\partial y} = 2v_2, \tag{8}$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = u_1, \frac{\partial w_0}{\partial y} = v_1. \tag{9}$$

Также имеем гармонические функции $w_1(z,\overline{z}) = \frac{1}{2i}(\int(v_2 + iu_2)dz - \overline{\int(v_2 + iu_2)dz})$, $w_0(z,\overline{z}) = \frac{1}{4i}(\int(v_1 + iu_1)dz - \overline{\int(v_1 + iu_1)dz})$.

Пусть задача решается только для двух сечений. Тогда имеем только два краевых условия на три аналитические функции $f_0(z) = v_0 + iu_0 + i\int w_1 d\overline{z}$, $f_1(z) = v_1 + iu_1 + 2iw_2\overline{z}$ и $f_2(z) = v_2 + iu_2$. Заметим, что опять w_0 зависит от u_0 и v_0.

Можно как и для линейного сплайна построить решения для аналитических функций $f_0(z)$ и $f_0(z) + hf_1(z)$ в первом секторе, для $f_0'(z)$ и $f_0'(z) + hf_1'(z)$ — во втором и выбрать $f_2(z)$ так, чтобы $f_0'(z) = f_0(z) + hf_1(z) + h^2 f_2(z)$. Тогда можно склеить сами функции $v + iu$, w на общем контуре, но не их производные.

Аналогично можно построить сплайн произвольной степени n. При этом получим $n-1$ дополнительных антианалитических слагаемых — констант интегрирования для $i\int w_k d\overline{z}$ и $n-1$ аналитических слагаемых, определяемых для $v_k + iu_k$. Тогда функции $f_k(z) = v_k + iu_k + ik\int w_k d\overline{z}$ аналитичны согласно соотношениям, аналогичным (4) и (5).

Аппроксимация производных по h выглядит следующим образом: строим решения ($f_0(z)$, $\sum\limits_{k=0}^{n} f_k(z)h^k$ и $f_0'(z)$, $\sum\limits_{k=0}^{n} f_k'(z)h^k$) для секторов, рассматриваем в первом секторе $\sum\limits_{k=0}^{n} f_k(z)h^k$, и определяем $f_k(z)$, $k = 2, \ldots, n$ из системы

$$f_0'(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)h^k,$$

$$\ldots$$

$$f_{n-2}'(z) = \frac{n!}{2} f_n(z) + h(n-1)! f_{n-1}(z).$$

Summary

P. N. Ivanshin. Approximate solution of 3D inverse aerohydrodynamics problem. We construct one approximate solution of 3D inverse aerohydrodynamics problem. **Key words:** (Approximate solution; spline; polyharmonic function)

Литература

1. *Валландер С. В.* Лекции по гидроаэромеханике. Учеб. пособие. – Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – 296 с.
2. *Ivanshin P., Shirokova E.* Spline-interpolation solution of 3D Dirichlet problem for a certain class of solids // IMA Journal of Applied Mathematics – 2013. – V. 78, No 6. – P. 1109-1129.
3. *Shirokova E.A., Ivanshin P.N.* Spline-Interpolation Solution of One Elasticity Theory Problem – Bentham e-books, 2011. – 276 p.

Сведения о каждом из авторов статьи

Иваньшин Петр Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ТОиГ института фузики Казанского федерального университета.

E-mail: *pivanshin@gmail.com*